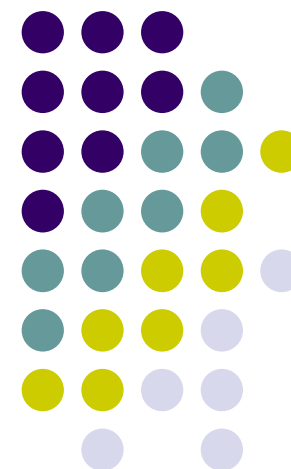


Lekcija 3: *Neizvjesnost i robustnost SISO sistema*

Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Multivarijabilni sistemi

2012/2013



Robusnost sistema

- **Sistem upravljanja je robusan ako je neosjetljiv na razlike između stvarnog sistema i njegovog modela koji se koristi za sintezu regulatora.**
- Ove razlike predstavljaju **neizvjesnost** modela.
- Ključna ideja H_∞ robusnog upravljanja - provjeriti da li su specifikacije dizajna zadovoljene čak i za “najlošiji slučaj” neizvjesnosti, odnosno potrebno je:
 - **Odrediti skup neizvjesnosti**: matematički opisati model neizvjesnosti.
 - **Provjeriti robusnu stabilnost (RS)**: odrediti da li sistem ostaje stabilan za sve procese u skupu neizvjesnosti.
 - **Provjeriti robusnu performansu (RP)**: ako je zadovoljena RS, odrediti da li su specifikacije performansi postignute za sve procese u skupu neizvjesnosti.



Predstavljanje neizvjesnosti

Izvori neizvjesnosti

- Uvijek postoje parametri linearnog modela koji su aproksimativno poznati.
- Ovi parametri mogu se mijenjati usljed nelinearnosti ili promjena radnih uvjeta.
- Mjerenja senzora nisu idealna (neperfektna).
- Na visokim frekvencijama struktura i red modela nisu poznati.
- U slučaju postojanja detaljnog modela može se raditi sa pojednostavljenim nominalnim modelom (nižeg reda) i predstaviti zanemarenu dinamiku kao neizvjesnost.
- Implementirani regulator može se razlikovati od onog dobivenog postupkom sinteze. U ovom slučaju on može uključivati neizvjesnost koja će omogućiti redukciju reda modela i implementacijske nepreciznosti.



Predstavljanje neizvjesnosti

- Sistem ne promatramo kao pojedinačni model $G(s)$, već kao **skup modela Π** koji obuhvaća sve moguće perturbirane modele procese (skup neizvjesnosti):

$$G(s) \in \Pi \quad \wedge \quad G_{true}(s) \in \Pi$$

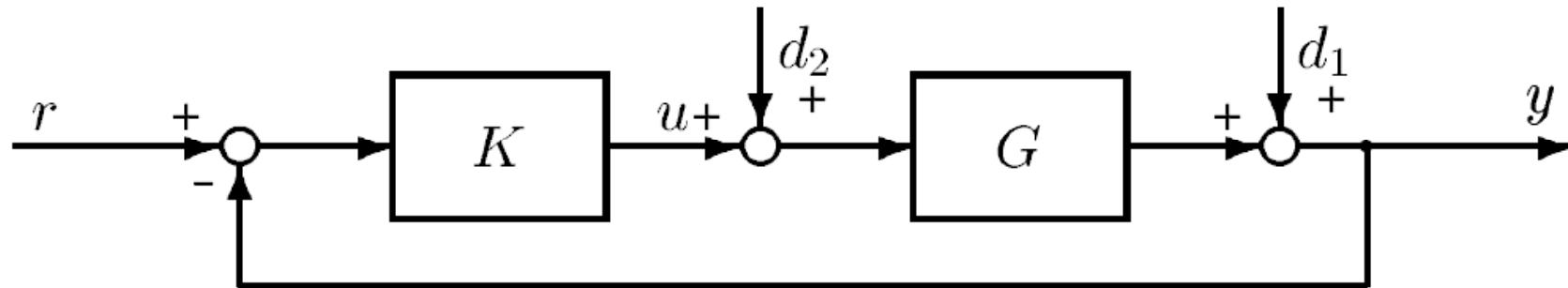
$G(s)$ – nominalan model, $G_{true}(s)$ – tačan model.

- U nastavku koristimo sljedeću notaciju:
 - $G(s) \in \Pi$ - nominalni model (bez neizvjesnosti),
 - $G_p(s) \in \Pi$ - perturbirani model procesa,
 - E – perturbacija koja nije normirana,
 - Δ - normirana perturbacija sa H_∞ normom manjom od 1.



Robusna stabilnost i performanse

- Prvo ćemo promatrati nominalnu stabilnost (NS) i nominalnu performansu (NP).



- Zatvoreni sistem zadovoljava **nominalnu stabilnost (NS)** ako:

$$S = (I + GK)^{-1}; KS; S_I = (I + KG)^{-1}; GS_I$$

imaju sve polove u kompleksnoj LHP.

Robusna stabilnost i performanse

- Zatvoreni sistem zadovoljava **nominalnu performansu (NP)** ako je:

$$\left\| \begin{array}{c} W_P S \\ W_T T \\ W_u K S \end{array} \right\|_{\infty} < 1$$

- Zatvoreni sistem zadovoljava **robusnu stabilnost (RS)** ako:

$$S_p = (I + G_p K)^{-1}; K S_p; S_{Ip} = (I + K G_p)^{-1}; G_p S_I$$

imaju sve polove u kompleksnoj LHP za sve $G_p \in \Pi$.



Robusna stabilnost i performanse

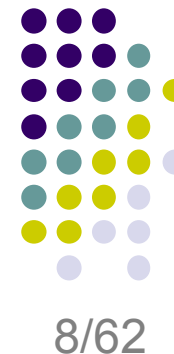
- Zatvoreni sistem zadovoljava **robustu performansu (RP)** ako je:

$$\left\| \begin{array}{l} W_P S_p \\ W_T T_p \\ W_u S_p \end{array} \right\|_{\infty} < 1$$

za sve $G_p \in \Pi$.

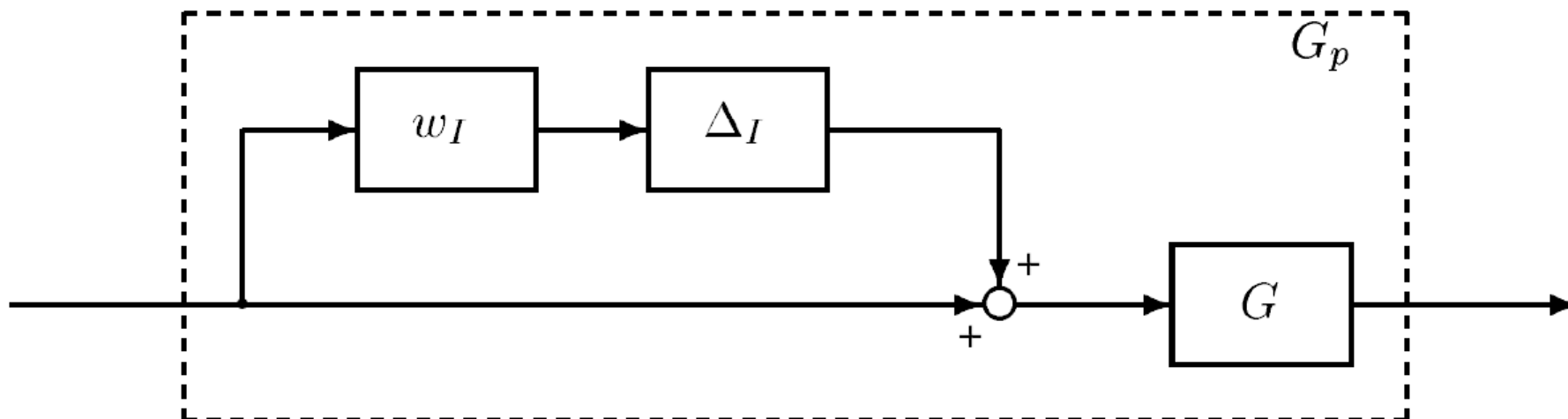
- Za provedbu analize potrebno je:
 - **Odrediti skup modela Π .**
 - **Analizirati RS i RP za zadani Π .**





Klase neizvjesnosti

- **Parametarska neizvjesnost:** struktura i red modela su poznati, ali su neki parametri neizvjesni.
- **Nemodelirana i zanemarena dinamika:** model ne opisuje kompletnu dinamiku sistema i red sistema nije poznat. **Na visokim frekvencijama dinamika obično nije u cijelosti opisana zbog nedovoljnog znanja o ponašanju sistema na ovim frekvencijama.**
- **Ukupna neizvjesnost:** kombinira nekoliko izvora neizvjesnosti u smetnju izabrane strukture modela.



Klase neizvjesnosti

- **Multiplikativna neizvjesnost** (slika na prethodnom slajdu) oblika:

$$\Pi_I : G_p(s) = G(s)(1 + w_I(s)\Delta_I(s)); \underbrace{|\Delta_I(j\omega)| \leq 1, \forall \omega}_{\|\Delta_I\|_\infty \leq 1}$$

- Neizvjesnost w_I opisuje frekvencijsku ovisnost neizvjesnosti.
- Perturbancija $\Delta_I(s)$ je bilo koja stabilna funkcija prijenosa sa amplitudom manjom od 1 za sve frekvencije.
- Primjeri prihvatljivih $\Delta_I(s)$:

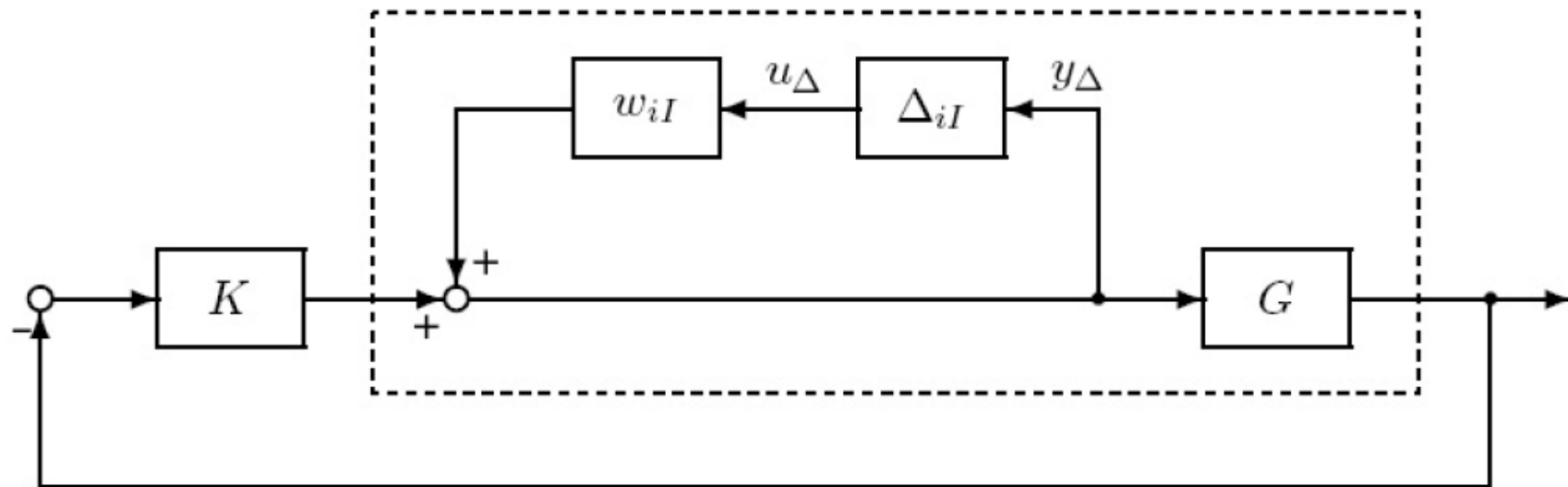
$$\frac{s - z}{s + z}; e^{-\theta s}; \frac{1}{(1 + \tau s)^n}; \frac{0.1s}{s^2 + 0.1s + 1}$$



Klase neizvjesnosti

- Inverzna multiplikativna neizvjesnost
- IMN je oblika:

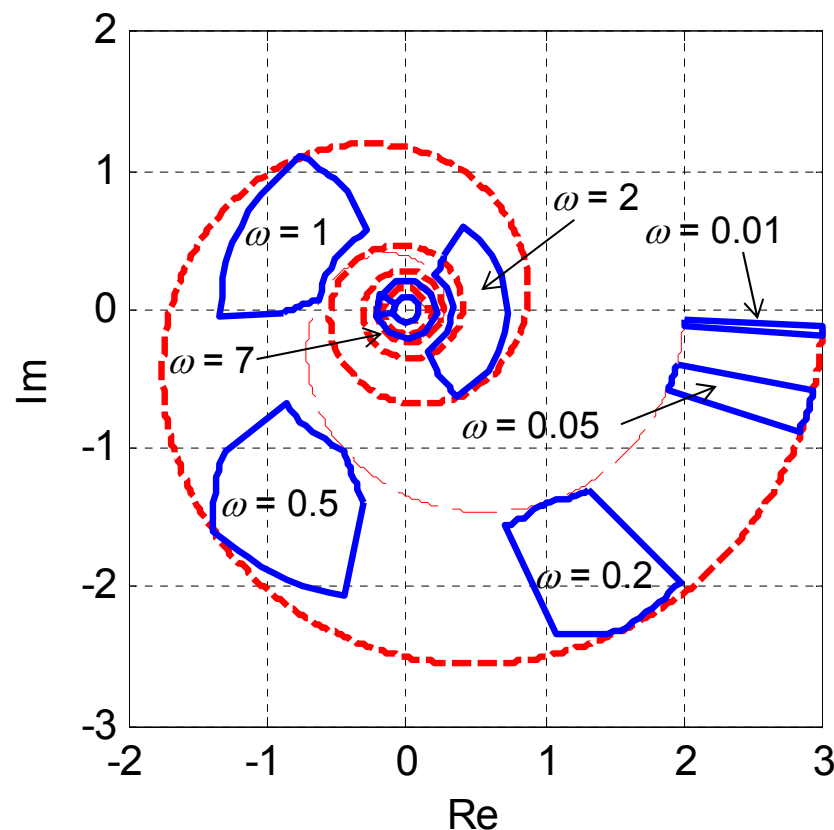
$$\Pi_{iI} : G_p(s) = G(s)(1 + w_{iI}(s)\Delta_{iI}(s))^{-1}; \|\Delta_{iI}\|_{\infty} \leq 1$$



- Omogućena za neizvjestan broj RHP polova čak i ako se zahtijeva da $\Delta_{iI}(s)$ bude stabilna.

Regioni neizvjesnosti

- **Primjer 1.** Parametarska neizvjesnost (frekvencijsko područje).
- Nyquistovi dijagrami (regioni) su generirani korištenjem sljedećeg skupa procesa:



$$G_p(s) = \frac{k}{1 + \tau s} e^{-\theta s}, \quad 2 \leq k, \tau, \theta \leq 3$$

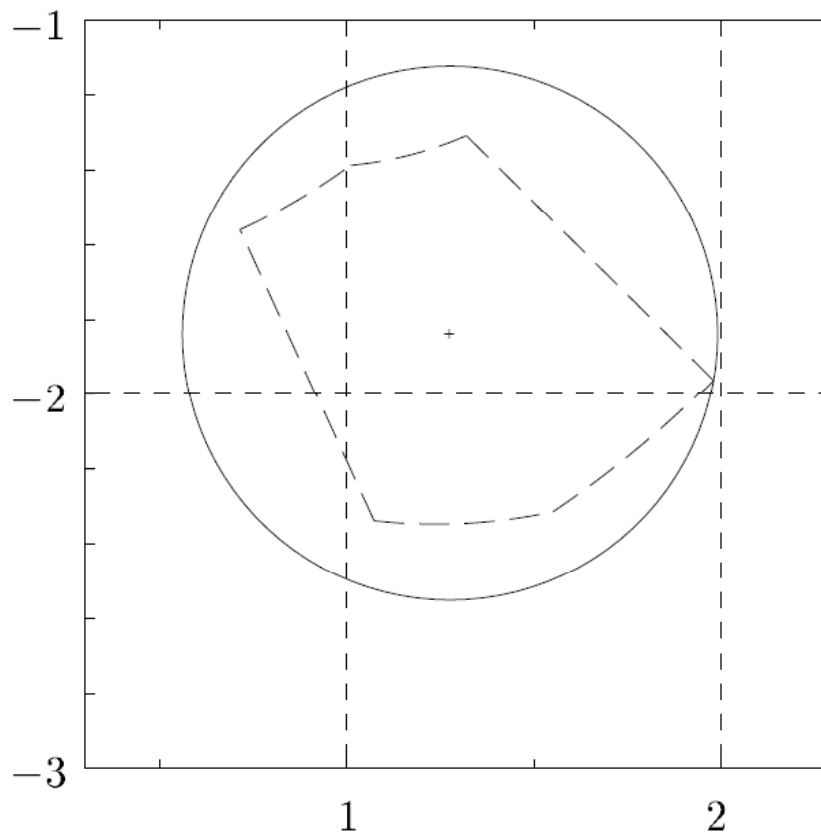
Na svakoj frekvenciji region kompleksnih brojeva $G_p(j\omega)$ generiran je mijenjanjem tri parametara (k, τ, θ) u područjima definiranim gornjim izrazom.

Regioni prevode parametarsku nezvjesnost u neizvjesnost predočenu u frekvencijskom području.

Neizvjesni regioni Nyquistovog dijagrama na zadanim frekvencijama.

Regioni neizvjesnosti

- Aproksimacija kompleksnih regiona neizvjesnosti pomoću krugova (diskova) za svaku frekvenciju ω sa centrom na $G(j\omega)$ (nominalni model).



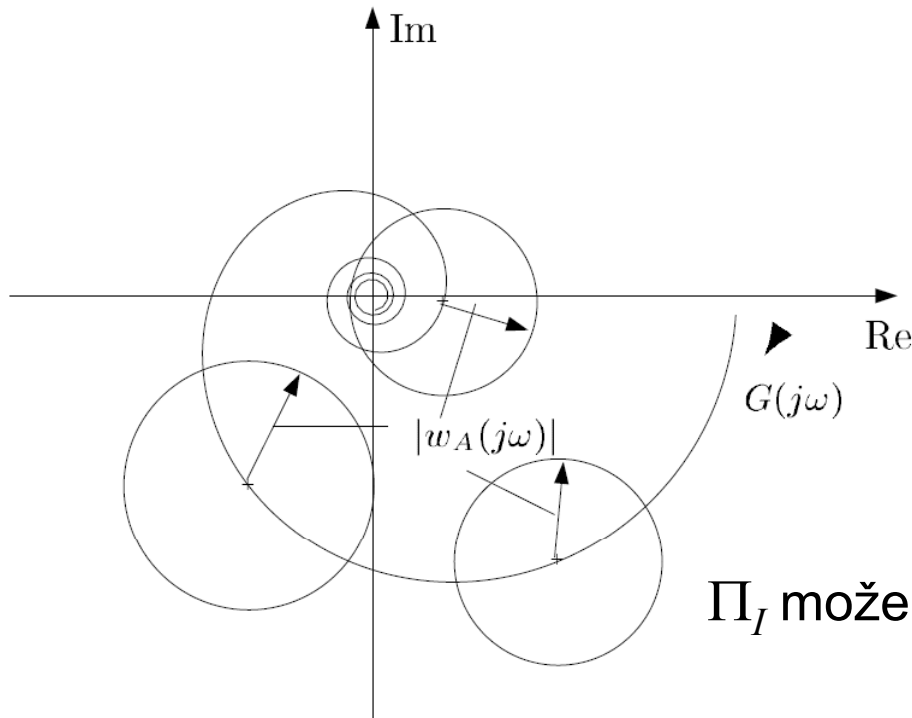
Prikaz regiona neizvjesnosti i korespondentnog kruga za sa $\omega = 0.2$ prethodne slike.

Prikaz regiona sa složenim perturbacijama



- Upotreba kružnih regiona za prikaz neizvjesnosti korištenjem Nyquistovih dijagrama (kod MIMO sistema kružni regioni nazivaju se **Gershgorinovi krugovi**), gdje su regioni generirani dodatnim kompleksnim normama ograničenih perturbacija oko nominalnog procesa G :

$$\Pi_A : G_p(s) = G(s) + w_A(s)\Delta_A(s); \|\Delta_A\|_\infty \leq 1 \quad \forall \omega$$



Δ_A – stabilna funkcija prijenosa

$$G(j\omega) + w_A(j\omega)\Delta_A(j\omega)$$

generira na svakoj frekvenciji kružni region polumjera $|w_A(j\omega)|$ sa centrom na $G(j\omega)$.

$$\Pi_I \text{ može se dobiti iz } \Pi_A: |w_I(j\omega)| = \frac{|w_A(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

Prikaz regiona sa složenim perturbacijama



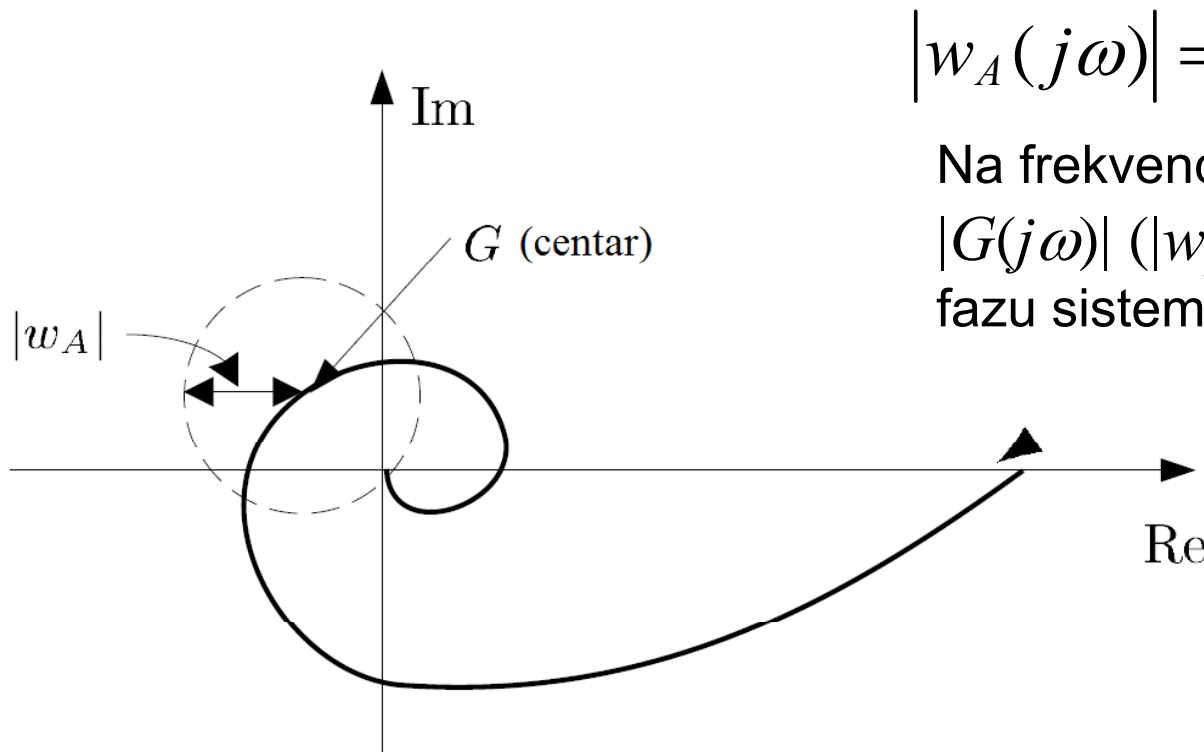
- $w_A(s)$ je težina koja je uvedena da bi se normirala amplituda smetnje na iznos manji od 1 na bilo kojoj frekvenciji.
- Da bi se izbjegli nepotrebni problemi, $w_A(s)$ se odabire da bude stabilna i minimalno fazna.
- Skup svih mogućih procesa čije funkcije prijenosa uključuju ishodište na frekvencijama gdje je $|w_A(j\omega)| \geq |G(j\omega)|$, ili ekvivalentno $|w_I(j\omega)| \geq 1$, predočen je slikom na sljedećem slajdu.
- Kružni regioni mogu se alternativno predstaviti multiplikativnom neizvjesnošću:

$$\Pi_I : G_p(s) = G(s)(1 + w_I(s)\Delta_I(s)); \quad |\Delta_I(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega$$

Prikaz regiona sa složenim perturbacijama



- Frekvencije na kojima je $|w_A(s)| > 1$ neizvjesnost premašuje 100% i Nyquistova krivulja može proći kroz ishodište.



$$|w_A(j\omega)| = |G(j\omega)w_I(j\omega)|$$

Na frekvencijama gdje je $|w_A(j\omega)| \geq |G(j\omega)|$ ($|w_I(j\omega)| \geq 1$) ne poznajemo fazu sistema.

- Zahtijeva se da propusni opseg bude manji od frekvencije za koju je $|w_I(j\omega)| = 1$.

Određivanje težine za složenu neizvjesnost



- Promatra se skup Π mogućih procesa dobivenih iz izraza za parametarsku neizvjesnost:

$$G_p(s) = \frac{k}{1 + \tau s} e^{-\theta s}, \quad 2 \leq k, \tau, \theta \leq 3$$

- Opisati skup procesa korištenjem pojedinačne, složene neizvjesnosti Δ_A ili Δ_I . **Složena, kružno oblikovana, neizvjesnost može se generirati na sljedeći način:**
 - 1. Izbor nominalnog modela** $G(s)$.
 - 2. Aditivna neizvjesnost.** Na svakoj frekvenciji pronaći najmanji polumjer $l_A(\omega)$ koji uključuje sve moguće procese u Π .

Određivanje težine za složenu neizvjesnost



- Ovo je opisano sa:

$$l_A(\omega) = \max_{G_p \in \Pi} |G_p(j\omega) - G(j\omega)|$$

odnosno :

$$|w_A(j\omega)| \geq l_A(\omega), \quad \forall \omega$$

- Obično je $w_A(s)$ niskog reda kako bi se pojednostavila sinteza regulatora.
- Cilj je predstaviti neizvjesnost u frekvencijskoj domeni na jednostavan način.

3. Multiplikativna (relativna) neizvjesnost.

Predstavlja najviše korišteni oblik neizvjesnosti.

Određivanje težine za složenu neizvjesnost



- Multiplikativna neizvjesnost se izražava sa:

$$l_I(\omega) = \max_{G_p \in \Pi} \left| \frac{G_p(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right|$$

odnosno :

$$|w_I(j\omega)| \geq l_I(\omega), \quad \forall \omega$$

- **Primjer 2. Multiplikativna težina za parametarsku neizvjesnost.** Zadan je skup procesa sa parametarskom neizvjesnošću:

$$\Pi: G_p(s) = \frac{k}{1 + \tau s} e^{-\theta s}, \quad 2 \leq k, \tau, \theta \leq 3$$

Određivanje težine za složenu neizvjesnost

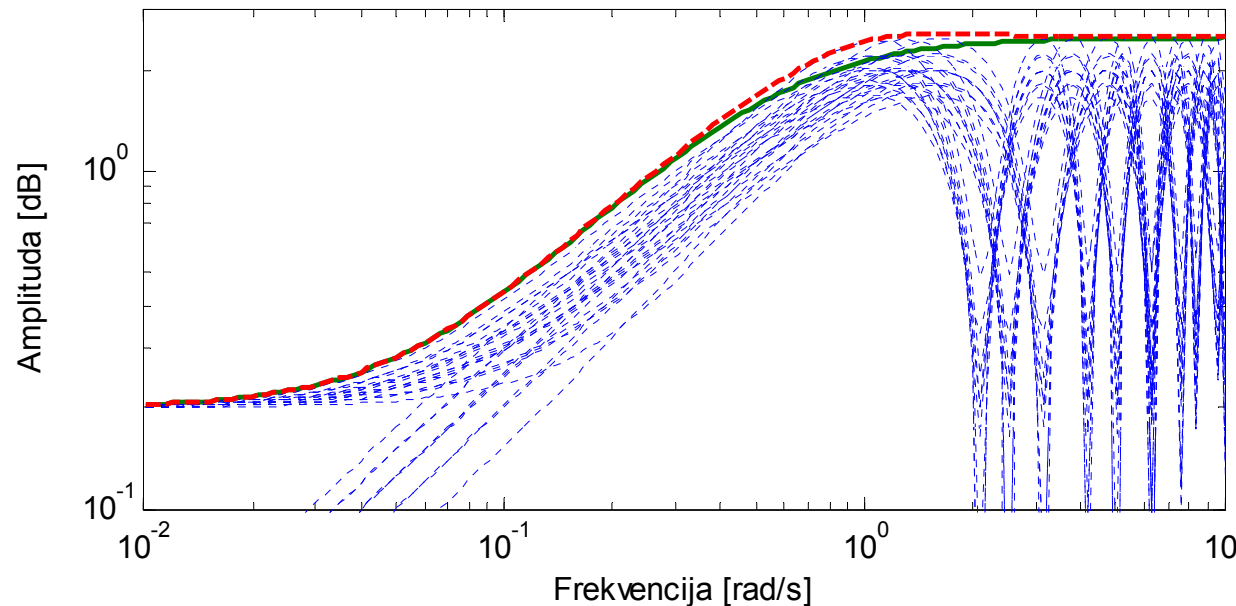


- Cilj je prikazati ovaj skup korištenjem multiplikativne neizvjesnosti sa racionalnom težinom $w_I(s)$.

1. Izbor nominalnog modela bez kašnjenja (da bi se pojednostavila sinteza regulatora):

$$G(s) = \frac{\bar{k}}{1 + \bar{\tau}s} = \frac{2.5}{1 + 2.5s}$$

2. Generiranje frekvencijskog odziva $|G_p - G| / |G|$ za sve dopustive parametre.



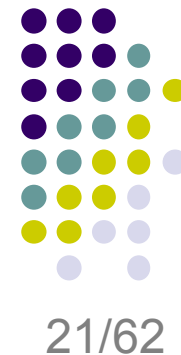
Određivanje težine za složenu neizvjesnost



- Na prethodnoj slici prikazani se relativne pogreške $|G_p - G| / |G|$ za 27 kombinacija od k , τ i θ , gdje su se za svaki od ovih parametara odabrale vrijednosti 2, 2.5 i 3 (3^3 kombinacija – krivulje predstavljene tačkama).
 - Ove vrijednosti su korištene za dobivanje $l_I(\omega)$, gdje krivulja za $l_I(\omega)$ mora za svaku frekvenciju ležati iznad isprekidanih krivulja (na prethodnoj slici ona na niskim frekvencijama mora poprimati vrijednost 0.2 a na visokim 2.5 – isprekidana linija).
3. Za određivanje $w_I(s)$ potrebno podešavati težine dok se ne postigne ovo limitirajuće ponašanje.
- Prvo se pokušava sa težinom prvog reda:

$$w_{I1}(s) = \frac{Ts + 0.2}{1 + (T / 2.5)s}, \quad T = 4$$

Određivanje težine za složenu neizvjesnost



- Ova težina daje dobro slaganje sa $l_I(\omega)$ izuzev oko frekvencije $\omega = 1$, gdje $|w_{I1}(j\omega)|$ ima manje vrijednosti od $l_I(\omega)$ (zelena krivulja na prethodnoj slici).
- Da bi se postiglo $|w_{I1}(j\omega)| \geq l_I(\omega)$ na svim frekvencijama potrebno je pomnožiti w_{I1} sa korekcijskim faktorom kako bi se povećalo pojačanje oko $\omega = 1$. Ovo se postiglo sa:

$$w_I(s) = w_{I1}(s) \frac{s^2 + 1.6s + 1}{s^2 + 1.4s + 1}$$

- Amplituda dobivene težine siječe jedinicu u $\omega = 0.26$.



Nominalni modeli

Izbor nominalnog modela

- Tri opcije za izbor nominalnog modela $G(s)$:
 - 1. Jednostavan model:** nizak red i bez vrem. kašnjenja
(+) pojednostavljuje sintezu regulatora, (-)
potencijalno velika neizvjesnost.
 - 2. Model prosječnih parametara:** koristi srednje
vrijednosti parametara:
(+) jednostavan izbor, region neizvjesnosti manji od 1,
(-) nije optimalan
 - 3. Model zasnovan na frekvencijskom odzivu:** koristi
model koji daje najmanji disk neizvjesnosti na
pojedinoj frekvenciji:
(+) najmanja neizvjesnost, (-) složena procedura i
visok red modela.

Nominalni modeli

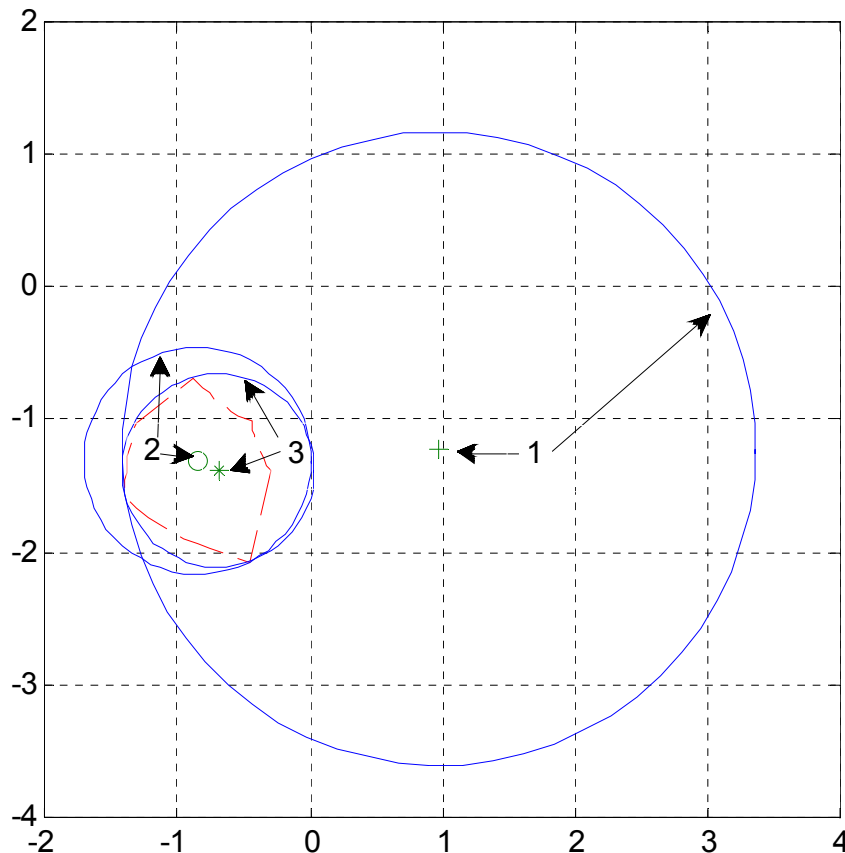
Primjer 3. Izbor nominalnog modela. Promatrajmo skup neizvjesnosti iz prethodnog primjera. Izabrani modeli za opcije 1. i 2. su:

$$G_1(s) = \frac{\bar{k}}{1 + \bar{\tau}s}, \quad G_2(s) = \frac{\bar{k}}{1 + \bar{\tau}s} e^{-\bar{\theta}s}$$

- Opcija 3. sadrži funkciju prijenosa koja nije racionalna.
- Na sljedećem slajdu su prikazani Nyquistovi dijagrami rezultatnih diskova za sve tri opcije na frekvenciji $\omega = 0.5$.
- Najbolje sinteze regulatora dobivaju se opcijom 1., iako je region neizvjesnosti mnogo veći nego za preostale dvije opcije.

Nominalni modeli

- Razlog za ovo je da “najlošiji” slučaj regiona u Nyquistovom dijagramu odgovara onim procesima sa najvećom negativnom fazom (koordinate oko $(-1.5, -1.5)$).



Dodatni procesi uključeni u najveći region (opcija 1.) se općenito lakše upravljaju i nije važno kada će se evaluirati “najlošiji” slučaj procesa s obzirom na stabilnost i performanse.

Kod SISO sistema za procese sa neizvjesnim vremenskim kašnjenjem, jednostavnije je i bolje koristiti nominalni model bez kašnjenja, a nominalno kašnjenje predstaviti kao dodatnu neizvjesnost.

Zanemarena dinamika

Zanemarena dinamika predstavljena kao neizvjesnost

- Jedna od prednosti opisa neizvjesnosti u frekvencijskom području, kada se koristi nominalni model, jest mogućnost predstavljanja zanemarene dinamike kao neizvjesnosti.
- Promatrajmo skup procesa:

$$G_p(s) = G_1(s)G_2(s)$$

gdje je $G_1(s)$ fiksna, a želimo zanemariti $G_2(s)$ u nominalnom modelu i prikazati $G_p(s)$ pomoću multiplikativne neizvjesnosti sa nominalnim modelom $G(s) - G_1(s)$.



Zanemarena dinamika

- **Amplituda relativne neizvjesnosti** uzrokovana zanemarenjem dinamike u $G_2(s)$ iznosi:

$$l_I(\omega) = \max_{G_p} \left| \frac{G_p - G}{G} \right| = \max_{G_2(s) \in \Pi_2} |G_2(j\omega) - 1|$$

gdje Π_2 označava da zanemarena dinamika može biti neizvjesna.

- **Primjer 4. Zanemareno kašnjenje.** Neka je $G_2(s) = e^{-\theta s}$, gdje $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$.
- Želimo predstaviti:

$$G_p(s) = G_1(s)e^{-\theta s}$$

pomoću procesa bez kašnjenja $G_1(s)$ i multiplikativne neizvjesnosti.

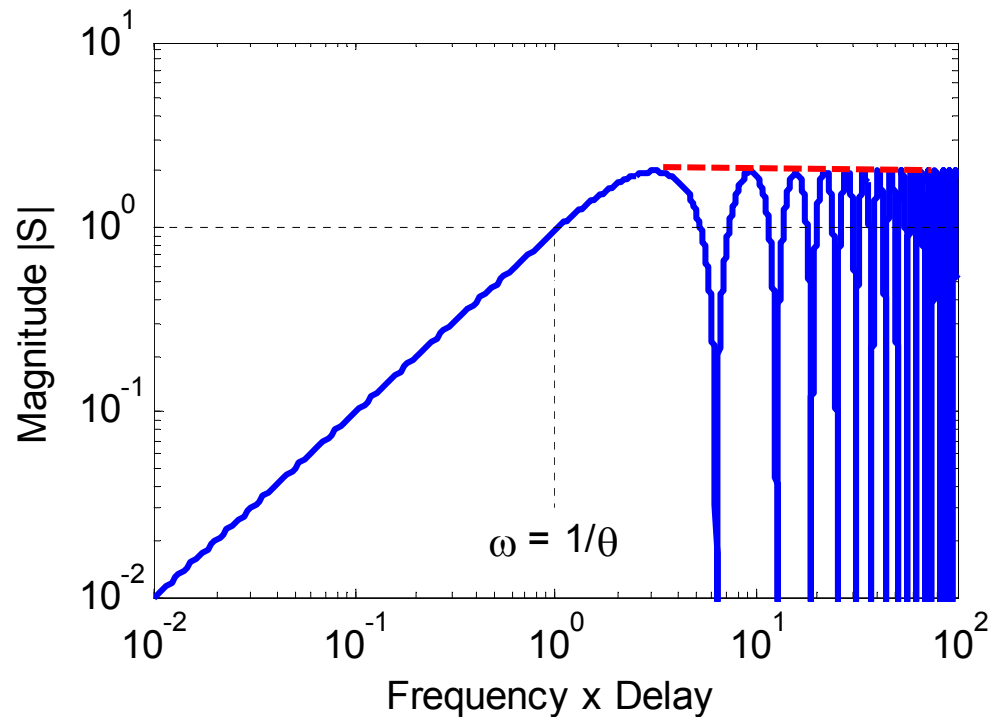
Zanemarena dinamika

- Za maksimalno kašnjenje relativna pogreška iznosi:

$$\left| 1 - e^{-j\omega\theta_{\max}} \right|$$



što je prikazano kao frekvencijska funkcija na slici.



Relativna neizvjesnost (multiplikativna) poprima 1 na frekvenciji $1/\theta_{\max}$ i 2 na frekvenciji π/θ_{\max} , tako da ona oscilira između 0 i 2 na višim frekvencijama.

Slijedi:

$$l_I(\omega) = \begin{cases} \left| 1 - e^{-j\omega\theta_{\max}} \right| & \omega < \pi/\theta_{\max} \\ 2 & \omega \geq \pi/\theta_{\max} \end{cases}$$



Zanemarena dinamika

- Nemodelirane dinamike su dinamike koje zanemarujemo jer nemamo znanja o njima, naprimjer, tačan red sistema.
- Nemodelirana dinamika se jednostavno može predstaviti multiplikativnom težinom:

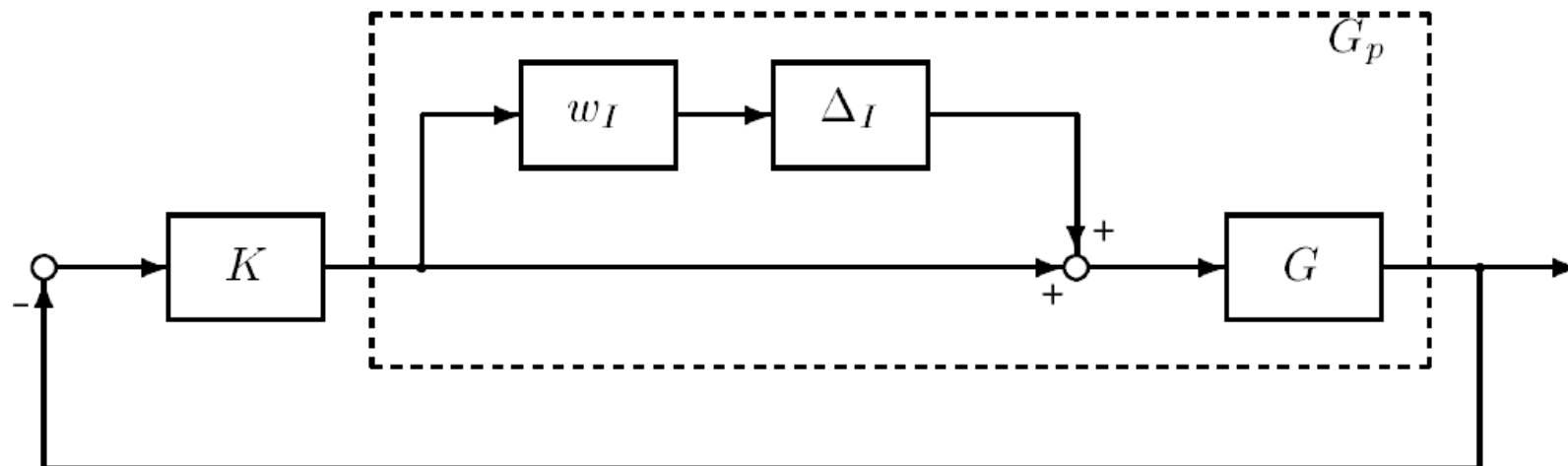
$$w_I(s) = \frac{\tau s + r_0}{(\tau / r_\infty)s + 1}$$

r_0 – relativna neizvjesnost na niskim frekvencijama,
na frekvenciji $\omega = 1/\tau$ relativna neizvjesnost $\sim 100\%$,
 r_∞ – relativna neizvjesnost na visokim frekvencijama.

Robusna stabilnost – Nyquistov dijagram



- Do sada je razmatrano kako matematički opisati neizvjesnost.
- **Fokus je sada na izvođenju uvjeta koji će osigurati da sistem ostane stabilan za sve perturbacije u neizvjesnom skupu.**
- Želimo odrediti stabilnost zatvorenog sistema upravljanja sa multiplikativnom neizvjesnošću amplitude $|w_I(j\omega)|$ (slika ispod).



Robusna stabilnost – Nyquistov dijagram



- Promatrajmo sistem sa multiplikativnom neizvjesnošću amplitude $|w_I(j\omega)|$:

$$\Pi_I : \quad L_p = G_p K = GK(1 + w_I \Delta_i) = L + w_I \Delta_i, \quad \|\Delta_i\|_\infty \leq 1$$

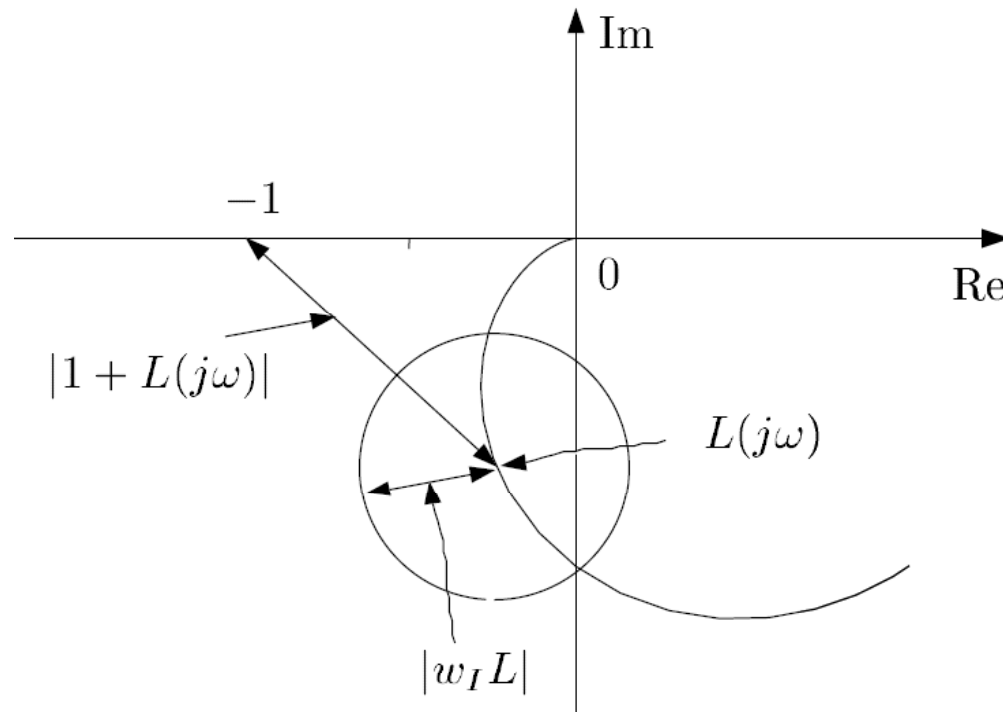
- Pretpostavimo da je funkcija prijenosa otvorenog sistema L_p stabilna.
- Koristi se Nyquistov uvjet stabilnosti za testiranje robusne stabilnosti zatvorenog sistema upravljanja.
- Slijedi

$$\begin{aligned} \text{RS} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{Sistem stabilan } \forall L_p \\ &\Leftrightarrow L_p \text{ ne treba obilaziti oko } -1, \forall L_p \end{aligned}$$

Robusna stabilnost – Nyquistov dijagram



- Za grafičku interpretaciju promatra se slika ispod, odnosno promatra se Nyquistov dijagram od L_p .



- $|-1-L|= |1+L|$ i $|w_I L|$ su respektivno udaljenost tačke $-1 + j0$ od centra kruga (koji predstavlja L_p) i polumjer kruga.

Robusna stabilnost – Nyquistov dijagram



- Kružno obilaženje je izbjegnuto ako niti jedan od krugova (diskova) ne obuhvata $-1 + j0$, te sa slike slijedi:

$$\begin{aligned} \text{RS} &\Leftrightarrow |w_I L| < |1 + L|, \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{w_I L}{1 + L} \right| < 1, \quad \forall \omega \Leftrightarrow |w_I T| < 1, \quad \forall \omega \\ &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|w_I T\|_{\infty} < 1 \end{aligned}$$

- Za SISO sisteme je $w_I = w_O$ i $T = T_I = GK(1 + GK)^{-1}$, tako da zahtjev za robusnom stabilnošću u slučaju multiplikativne neizvjesnosti daje izraz za gornju granicu na komplementarnu osjetljivost:

$$\text{RS} \Leftrightarrow |T| < 1/|w_I|, \quad \forall \omega$$

Robusna stabilnost – Nyquistov dijagram



- Ovaj uvjet, u slučaju nužnog i dovoljnog uvjeta, osigurava postojanje procesa tako da su na svakoj frekvenciji sve perturbacije koje zadovoljavaju uvjet $|\Delta(j\omega)| \leq 1$ moguće.
- Ako ovo nije slučaj tada je prethodni uvjet dovoljan za robusnu stabilnost (RS), tj. kada je perturbacija ograničena na realne vrijednosti, kao što je slučaj sa parametarskom neizvjesnošću pojačanja.
- **Primjer 5.** Promatrajmo nominalni proces i PI regulator

$$G(s) = \frac{3(1-2s)}{(1+5s)(1+10s)}, \quad K(s) = K_c \frac{1+12.7s}{12.7s}$$

Robusna stabilnost – Nyquistov dijagram



- Ako inicijalno odaberemo, u skladu sa Ziegler-Nicholsovim pravilom, $K_c = K_{c1} = 1.13$ dobiva se nominalno stabilan zatvoreni sistem upravljanja.
- Pretpostavimo jedan “ekstremno” neizvjestan proces $G'(s) = 4(1-3s) / (1+4s)^2$.
- Za ovaj proces relativna pogreška $|(G' - G)/G|$ iznosi 0.33 na niskim frekvencijama, 1 na frekvenciji oko 0.1 rad/s i 5.25 na visokim frekvencijama.
- Na temelju ove činjenice i izraza za izbor težine neizvjesnosti, slijedi:

$$w_I(s) = \frac{\tau s + r_0}{(\tau / r_\infty)s + 1} = \frac{10s + 0.33}{(10 / 5.25)s + 1}$$

Robusna stabilnost – Nyquistov dijagram



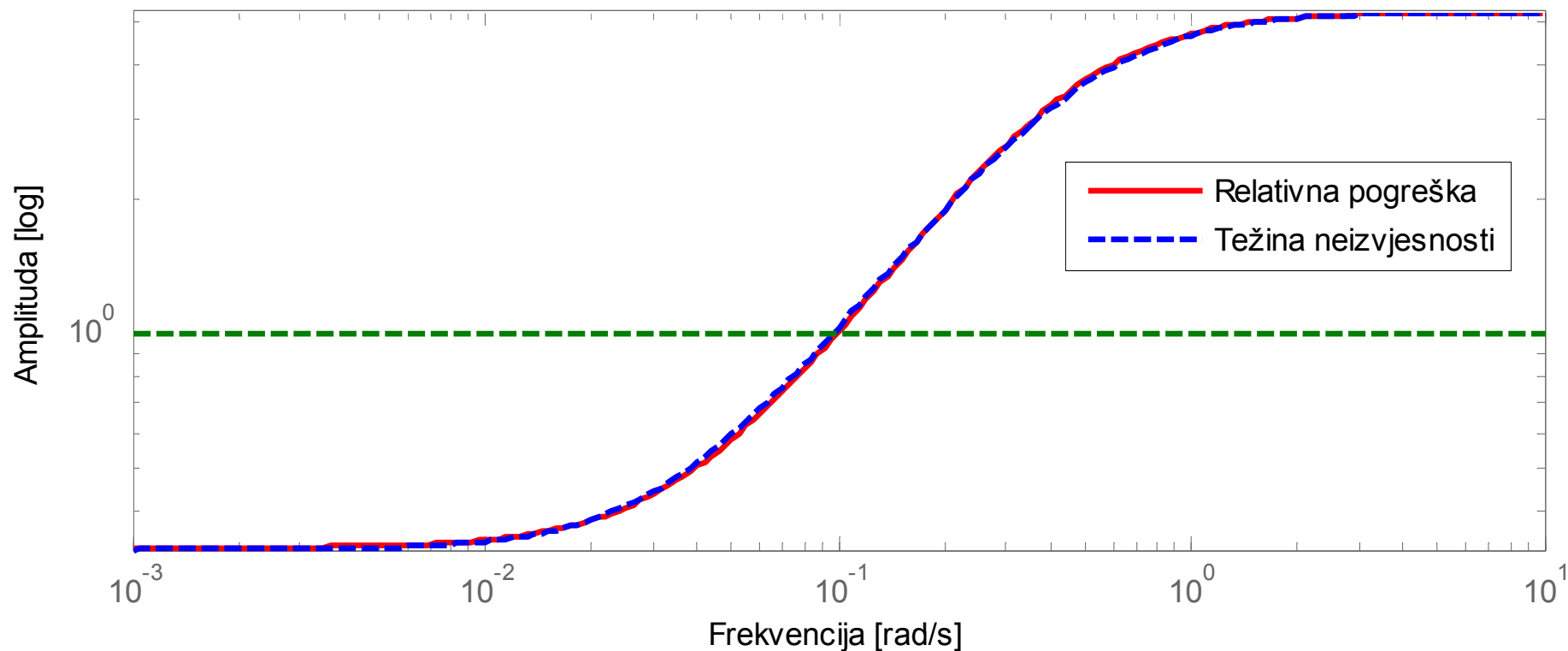
- Nadalje, želimo ispitati da li sistem ostaje stabilan za sve moguće procese dane sa $G_p(s) = G(1+w_I\Delta_t)$, gdje Δ_t predstavlja bilo koju perturbaciju koja zadovoljava uvjet:

$$\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$$

- **Promatrajmo amplitudu funkcije nominalne komplementarne osjetljivosti** $T_1 = GK_1/(1+GK_1)$.
- Ona premašuje granicu $1/|w_I|$ između 0.1 i 1 rad/s, tako da uvjet RS $\Leftrightarrow |T| < 1/|w_I|$, $\forall \omega$ nije ispunjen.
- Za postizanje robusne stabilnosti (RS) potrebno je smanjiti iznos pojačanja, gdje izbor $K_{c2} = 0.31$ zadovoljava RS, što se može vidjeti iz krivulje amplitude $T_2 = GK_2/(1+GK_2)$.

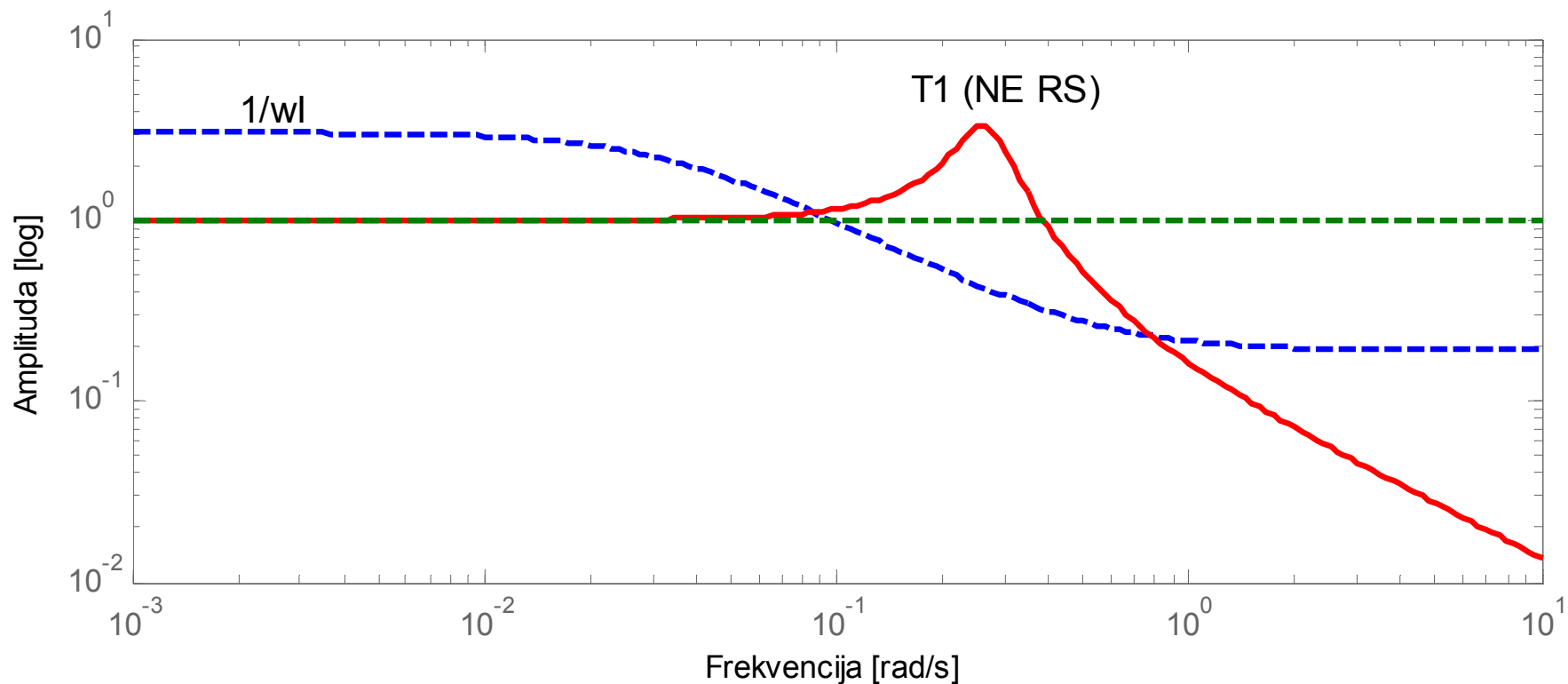
Robusna stabilnost – Nyquistov dijagram

- Grafički prikaz relativne pogreške i težine neizvjesnosti w_I .



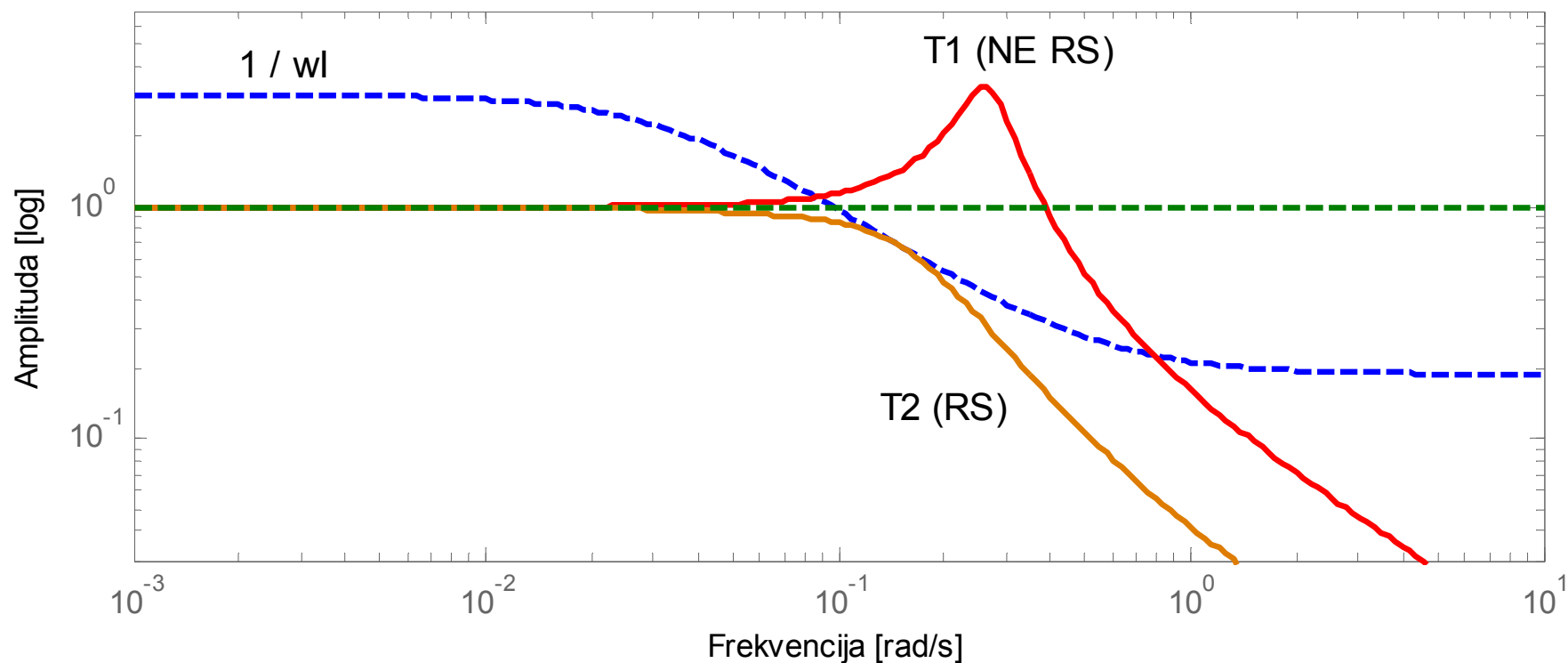
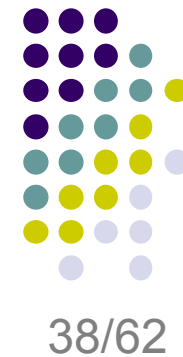
Robusna stabilnost – Nyquistov dijagram

- Provjera robusne stabilnosti sa multiplikativnom neizvjesnošću.
- Rezultati sa $K_c = K_{c1} = 1.13$.



Robusna stabilnost – Nyquistov dijagram

- Rezultati sa $K_{c2} = 0.31$.
- Robusna stabilnosti (RS) postignuta sa $K_{c2} = 0.31$ (krivulja $T_2 = GK_2/(1+GK_2)$).



Robusna stabilnost–Teorem malog pojačanja



- **Teorem 1.** Promatrajmo zatvoreni sistem sa stabilnom funkcijom prijenosa petlje $L(s)$. Sistem sa zatvorenom petljom je stabilan ako vrijedi:

$$\|L(j\omega)\| \leq 1, \quad \forall \omega$$

gdje $\|\cdot\|$ označava normu matrice.

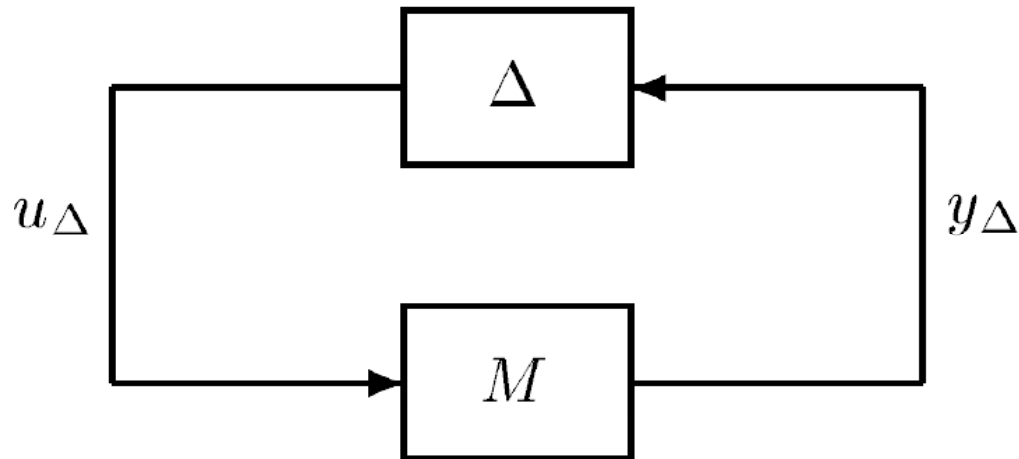
- Generalizirani Nyquistov kriterij: za nestabilnost zatvorene petlje neki $\lambda_i(L(j\omega))$ trebaju obuhvatati -1 , tj. mora postojati neki i i ω takvi da je $\lambda_i(L(j\omega)) = -A$, gdje je A realni broj manji od -1 .
- Navedeno implicira da je $\rho(L(j\omega)) = -A$ za neke ω . Slijedi, zatvorena petlja ne može biti nestabilna ako je $\rho(L(j\omega)) < 1, \forall \omega$.
- Budući da je $\rho(L) \leq \|L\|$ za bilo koju normu matrice, slijedi rezultat. Ovo je samo dovoljan uvjet.

Robusna stabilnost–Teorem malog pojačanja



40/62

- Zatvorena petlja:



- Primjena Nyquistovog uvjeta stabilnosti na funkciju prijenosa zatvorene petlje $M\Delta$ (ne na L_p).
- Sistem sa slike je stabilan ako su $M(s)$ i $\Delta(s)$ stabilne i $\|M\Delta\|_\infty < 1$.
- Sa $G_p(s) = G(1+w_I\Delta_t)$ dobiva se:

$$M = w_I KG(I + KG)^{-1} = w_I T$$

Robusna stabilnost–Teorem malog pojačanja



41/62

- Uz pretpostavku da je $\Delta(s)$ stabilno postiže se RS uvjet:

$$\text{RS} \Leftrightarrow \|w_I T\|_{\infty} < 1$$

odnosno

$$\text{RS} \Leftrightarrow \|M\|_{\infty} < 1, \quad \forall \omega$$

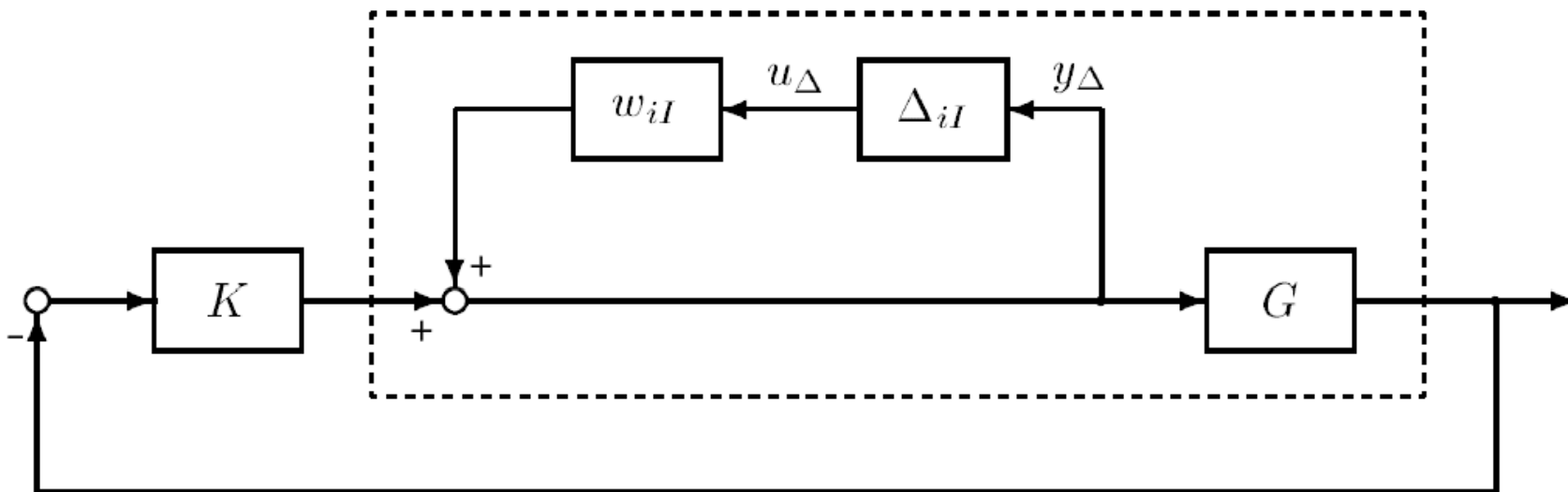
što predstavlja isti rezultat kao sa Nyquistom kriterijem, s tim da ovdje nije potrebno pretpostaviti da je $L_p(s)$ **stabilna**.

Robusna stabilnost–Inverzna multiplikativna neizvjesnost



- RS uvjet za zatvoreni sistem sa inverznom multiplikativnom neizvjesnošću:

$$\Pi_{iI} : G_p = G(1 + w_{iI} \Delta_{iI})^{-1}; \quad \|\Delta_{iI}\|_{\infty} \leq 1$$



Robusna stabilnost–Inverzna multiplikativna neizvjesnost



- U slučaju M - Δ forme imamo:

$$M = (1 + KG)^{-1} w_{iI} = w_{iI} S$$

- Robusna stabilnost je zadovoljena ako je Δ_{iI} stabilna i

$$RS \Leftrightarrow \|w_{iI} S\|_{\infty} < 1, \quad \forall \omega$$

- Uvjet je korespondentan sa:

$$RS \Leftrightarrow |S| < 1/|w_{iI}|, \quad \forall \omega$$

- Za čvrstu regulaciju (tight control) potrebno je malo $|S|$, odnosno velik iznos neizvjesnosti $|w_{iI}|$.

Robusna performansa (RP) u SISO sistemu

- Promatramo performansu izraženu preko otežane funkcije osjetljivosti.
- Uvjet **za nominalnu performansu** (NP) je tada:

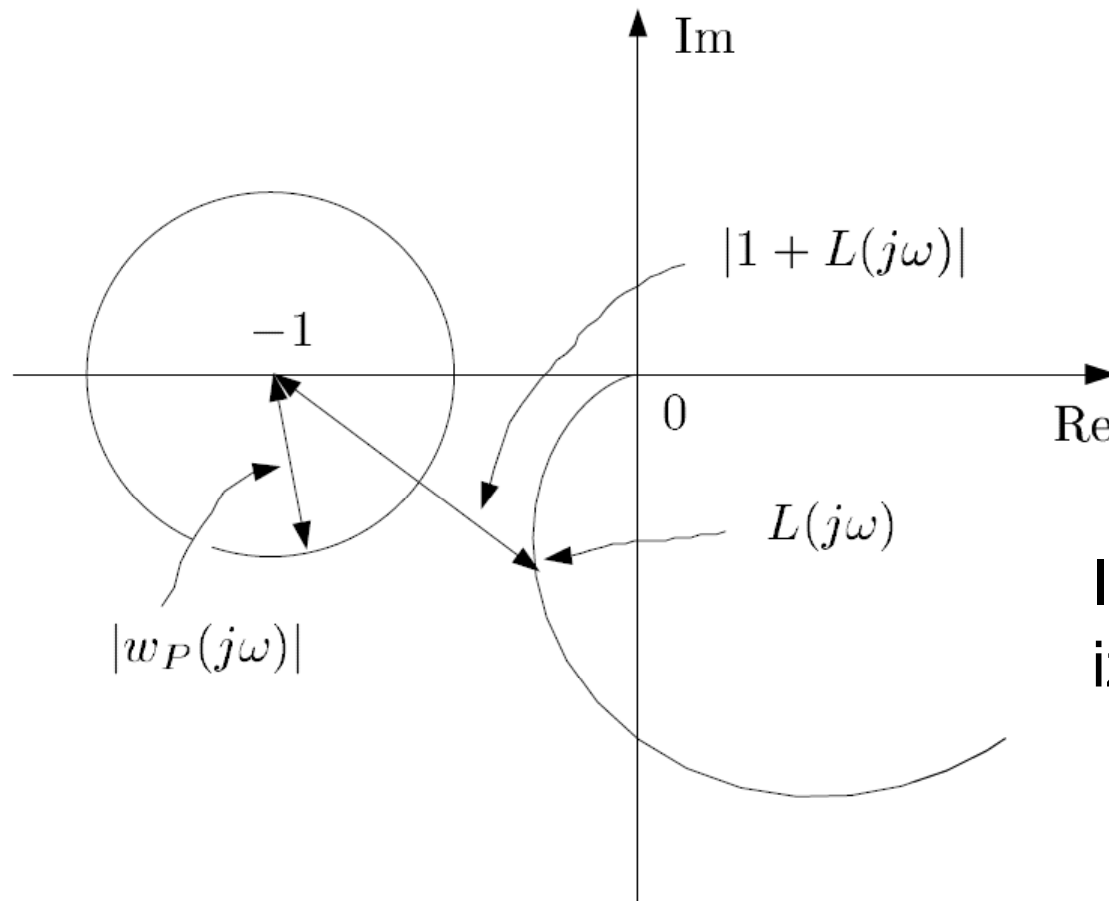
$$\text{NP} \Leftrightarrow |w_P S| < 1, \quad \forall \omega \Leftrightarrow |w_P| < |1 + L|, \quad \forall \omega$$

- $|1+L|$ predstavlja, na svakoj frekvenciji, udaljenost $L(j\omega)$ od -1 (odnosno od tačke $-1+j0$) na Nyquistovom dijagramu, tako da $L(j\omega)$ mora biti udaljena najmanje $|w_P(j\omega)|$ od -1 .
- Ovo je grafički ilustrirano na sljedećem slajdu, gdje se može uočiti da za NP, $L(j\omega)$ mora ostati izvan kruga (disk) polumjera $|w_P(j\omega)|$, čiji centar je u tački $-1+j0$.



Robusna performansa (RP) u SISO sistemu

- Nyquistov dijagram ilustrira uvjet nominalne performanse $|w_P(j\omega)| < |1+L|$.



Izbjeći $-1+j0$ prikladnim izborom rezerve $|w_P(j\omega)|$.

Robusna performansa

- Za nominalnu performansu zahtijeva se da uvjet:

$$\text{NP} \Leftrightarrow |w_P S| < 1, \quad \forall \omega \Leftrightarrow |w_P| < |1 + L|, \quad \forall \omega$$

bude zadovoljen za sve procese, uključujući i najgore slučajeve neizvjesnosti.

- Zahtjev na robusnu performansu:

$$\text{RP} \Leftrightarrow \|w_P S_p\|_{\infty} < 1, \quad \forall S_p \Leftrightarrow |w_P| < |1 + L_p|, \quad \forall L_p, \forall \omega$$

- Sa $L_p = L(1 + w_I \Delta_I) = L + w_I L \Delta_I$ dobiva se:

$$\text{RP} \Leftrightarrow |w_P| + |w_I L| < |1 + L|$$

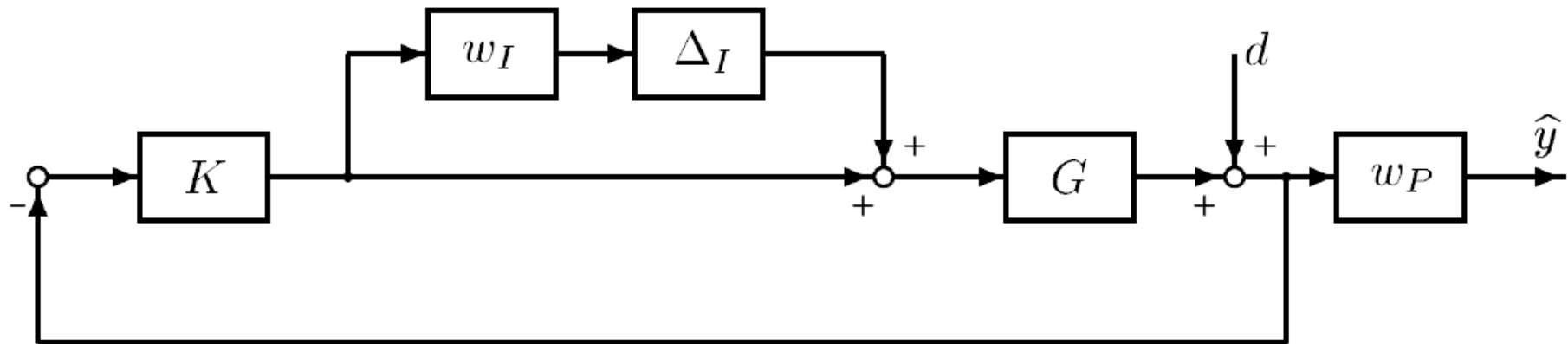
- Odnosno RP uvjet postaje:

$$|w_P (1 + L)^{-1}| + |w_I L (1 + L)^{-1}| < 1, \quad \forall \omega \Leftrightarrow |w_P S| + |w_I T| < 1, \quad \forall \omega$$

Robusna performansa

- Drugim riječima imamo:

$$\text{RP} \Leftrightarrow \max_{\omega} (|w_P S| + |w_I L|) < 1, \quad \forall \omega$$



- U najgorem slučaju otežane osjetljivosti na frekvencijama manjim od 1 slijedi:

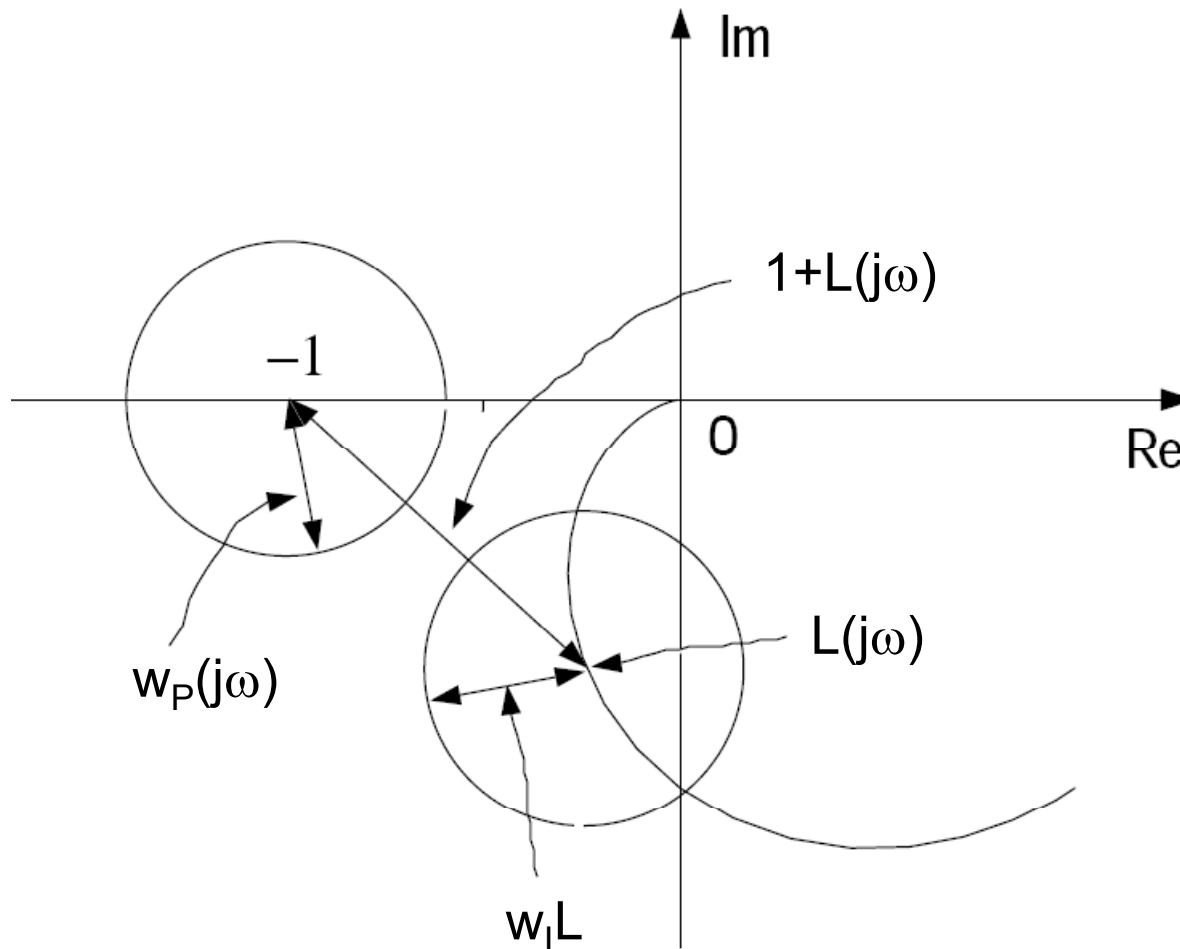
$$\text{RP} \Leftrightarrow \max_{S_p} |w_P S_p| < 1, \quad \forall \omega$$



Robusna performansa

- Nyquistova grafička interpretacija uvjeta robusne performanse:

$$|w_P| < |1 + L_P|$$



Robusna performansa

- Nadalje se dobiva:

$$\max_{S_p} |w_P S_p| = \frac{|w_P|}{|1+L| - |w_I L|} = \frac{|w_P S|}{1 - |w_I T|}$$

- RP uvjet

$$\text{RP} \Leftrightarrow \max_{\omega} (|w_P S| + |w_I T|) < 1, \quad \forall \omega$$

- RP uvjet za ovaj problem je aproksimiran uvjetom miješanih neizvjesnosti H_{∞} (**RP uvjet se predominantno formulira kao H_{∞} problem**):

$$\left\| \begin{array}{c} w_P S \\ w_I T \end{array} \right\|_{\infty} = \max_{\omega} \sqrt{|w_P S|^2 + |w_I T|^2} < 1$$



Robusna performansa

- RP uvjet može se koristiti za dobivanje granica za **oblikovanje petlje** (loop shaping) $|L|$.
- Za zadanu frekvenciju imamo da je $|w_P S| + |w_I T| < 1$ zadovoljen ako je:

$$|L| > \frac{1 + |w_P|}{1 - |w_I|}$$

(na frekvencijama gdje je $|w_I| < 1$)

$$|L| < \frac{1 - |w_P|}{1 + |w_I|}$$

(na frekvencijama gdje je $|w_P| < 1$)

- Ova dva uvjeta mogu se kombinirati preko različitih frekvencijskih područja.



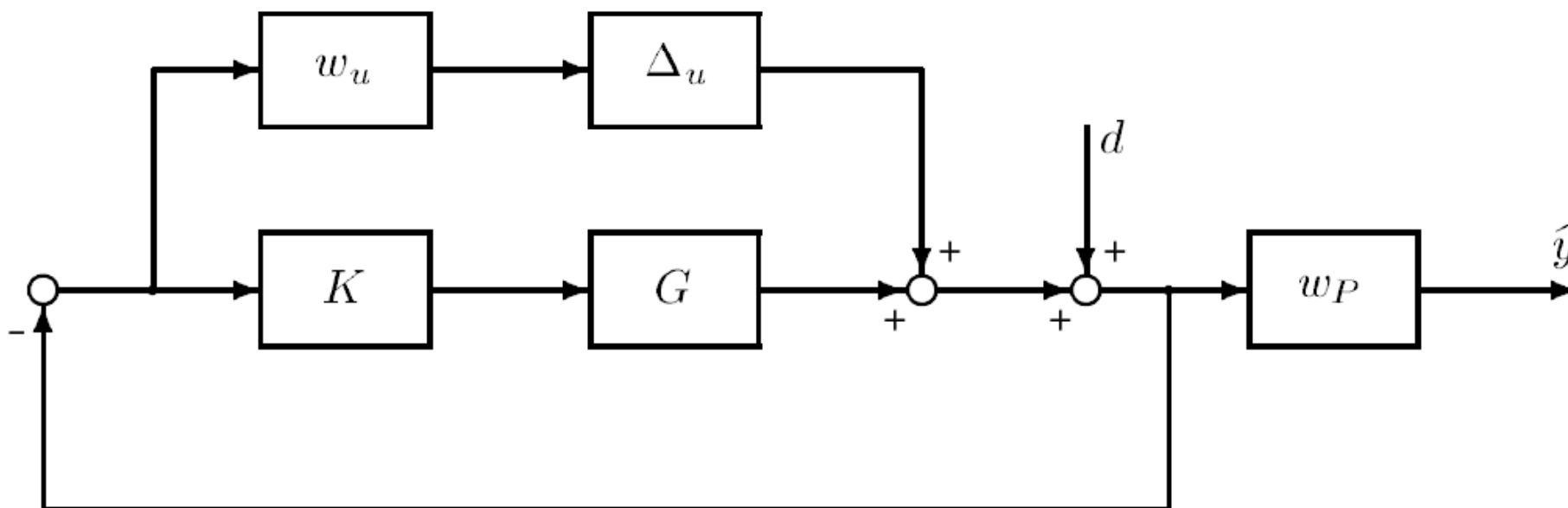
Robusna performansa

- Izraz:

$$\mu(N_{RP}) = |w_P S| + |w_I T|$$

naziva se **strukturirana singularna vrijednost μ** za RP u ovom slučaju.

- **Primjer 6.** Analiza robusne performanse za SISO sistem predočen slikom.



Robusna performansa

- Za sistem sa slike dano je:

$$\text{RP} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left| \frac{\hat{y}}{d} \right| < 1, \forall \Delta_u \leq 1, \quad w_P(s) = 0.25 + \frac{0.1}{s}, \quad w_u(s) = r_u \frac{s}{s+1}$$

- Potrebno je:
 - a) Odrediti uvjet za robusnu performansu (RP)?
 - b) Za koje vrijednosti r_u nije moguće zadovoljiti uvjet robusne performanse?
 - c) Za $r_u = 0.5$ promatrati dva slučaja nominalne funkcije prijenosa petlje: 1) $GK_1(s) = 0.5/s$ i 2) $GK_2(s) = (0.5/s) \cdot (1-s)/(1+s)$. Za svaki sistem skicirati amplitudu od S i njegove granice performanse kao funkciju frekvencije.



Robusna performansa

- **Rješenje:**

a) Zahtjev za RP je $|w_p S_p| < 1, \forall S_p, \forall \omega$, gdje su moguće osjetljivosti dane sa:

$$S_p = \frac{1}{1 + GK + w_u \Delta_u} = \frac{S}{1 + w_u \Delta_u S}$$

- Uvjet za RP postaje:

$$\text{RP} \Leftrightarrow \left| \frac{w_p S}{1 + w_u \Delta_u S} \right| < 1, \forall \Delta_u, \forall \omega$$

- Jednostavna analiza pokazuje da najgori slučaj koji odgovara odabranom Δ_u amplitude 1 je takav da je izraz $w_u \Delta_u S$ realan i negativan.



Robusna performansa

- S obzirom na navedeno slijedi:

$$\text{RP} \Leftrightarrow |w_P S| < 1 - |w_u S|, \quad \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow |w_P S| + |w_u S| < 1, \quad \forall \omega$$

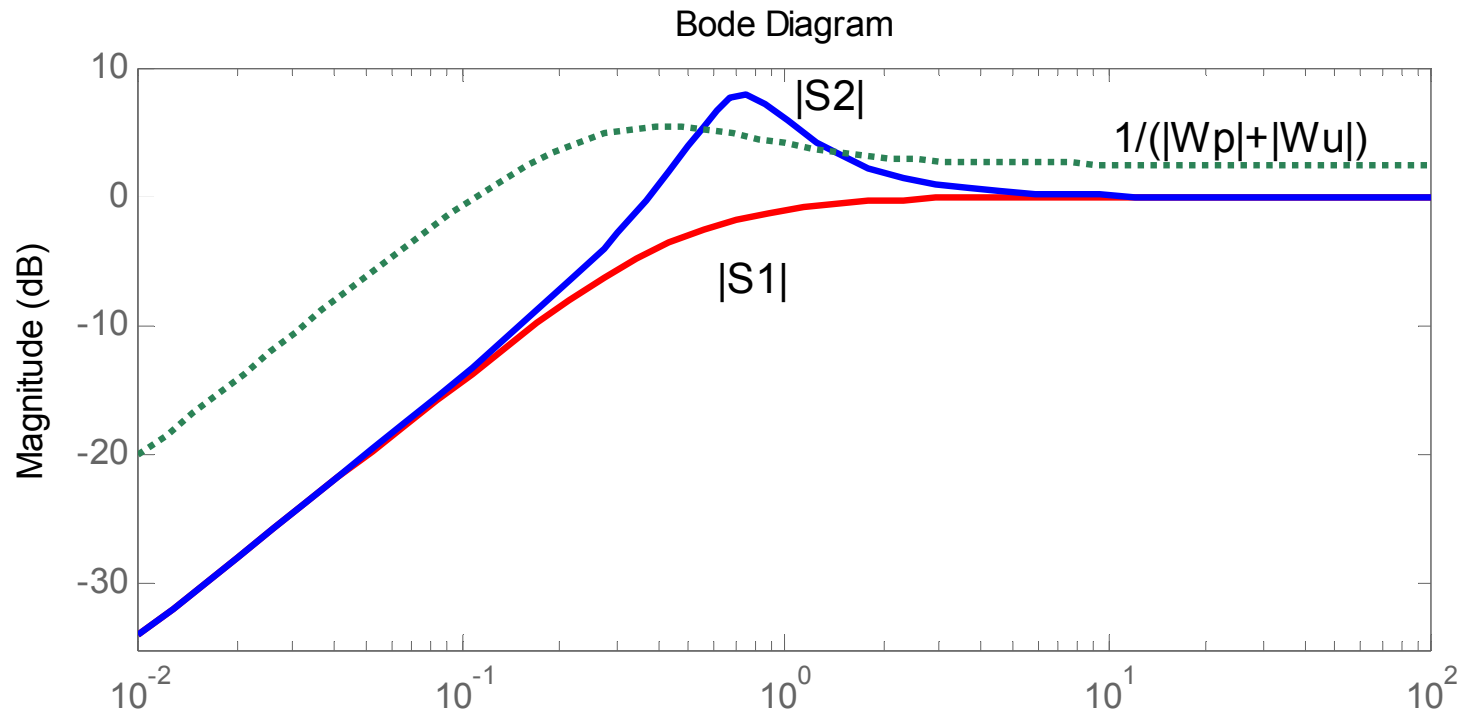
$$\Leftrightarrow |S(j\omega)| < \frac{1}{|w_P(j\omega)| + |w_u(j\omega)|}, \quad \forall \omega$$

- b) Budući da je sistem striktno pravilan imamo $|S| = 1$ na visokim frekvencijama i stoga mora zadovoljavati uvjet $|w_u(j\omega)| + |w_P(j\omega)| < 1$ kada $\omega \rightarrow \infty$
- S obzirom na postavke zadatka ovo je ekvivalentno sa $r_u + 0.25 < 1$.



Robusna performansa

- Prema tome najmanje što se mora zadovoljiti jest $r_u < 0.75$ za RP uvjet, tako da se RP ne može zadovoljiti ako je $r_u \geq 0.75$.
- c) Dizajn S1 daje RP, dok S2 ne, što se dobiva provjerom RP uvjeta grafički na slici ispod. Vršna vrijednost od $|S_1|$ iznosi 1 dok od $|S_2|$ je 2.45.



Sličnost između RS i RP

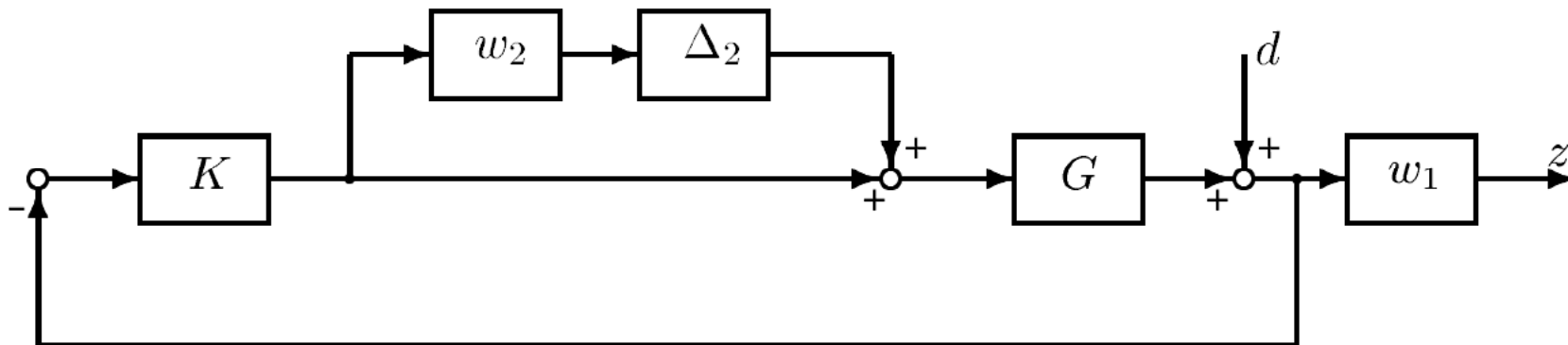
- Robusna performansa može se promatrati kao specijalan slučaj robusne stabilnosti (sa višestrukim perturbacijama).
- Da bi se ovo pokazalo koriste se dvije strukture:
 - **RP sa multiplikativnom neizvjesnošću,**
 - **RS sa kombiniranom multiplikativnom i inverznom multiplikativnom neizvjesnošću.**
- Ove strukture su prikazane na sljedeće dvije slike.

Sličnost između RS i RP

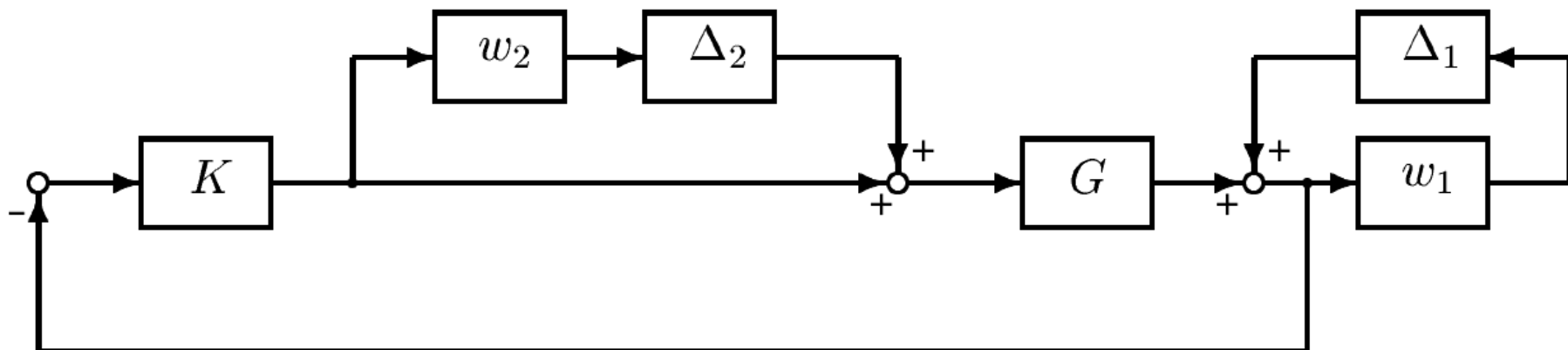
RP sa multiplikativnom neizvjesnošću



57/62



RS sa kombiniranom multiplikativnom i inverznom multiplikativnom neizvjesnošću





Sličnost između RS i RP

- Obično se neizvjesne perturbacije normiraju tako da je:

$$\|A_1\|_\infty < 1; \quad \|A_2\|_\infty < 1$$

- Budući da se koristi H_∞ norma za definiranje neizvjesnosti i performansi, te da su za oba slučaja težine jednake, slijedi da su testovi RP i RS u oba slučaja identični.

Uvjet za RP

- Ukoliko se w_P i w_I zamijene sa w_1 i w_2 imamo:

$$\text{RP} \Leftrightarrow \max_{\omega} (|w_1 S| + |w_2 T| < 1), \quad \forall \omega$$

Sličnost između RS i RP

Uvjet za RS

- Neka je L_p stabilna funkcija. Želimo da zatvoreni sistem bude stabilan za sve moguće Δ_1 i Δ_2 .
- Zahtjev za RS je ekvivalentan zahtjevu izbjegavanja zaobilaženja Nyquistovog dijagrama od L_p oko tačke -1.
- Drugim riječima rastojanje između L_p i -1 mora biti veće od nule, tj. $|L_p + 1| > 0$, iz čega slijedi:

$$\text{RS} \Leftrightarrow |1 + L_p| > 0, \quad \forall L_p, \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow |1 + L(1 + w_2\Delta_2)(1 - w_1\Delta_1)^{-1}| > 0, \quad \forall \Delta_1, \forall \Delta_2, \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow |1 + L + Lw_2\Delta_2 - w_1\Delta_1| > 0, \quad \forall \Delta_1, \forall \Delta_2, \forall \omega$$

Sličnost između RS i RP

- Najlošiji slučaj je kada se odaberu Δ_1 i Δ_2 amplituda jednakih 1, tako da se dobiva:

$$\begin{aligned} \text{RS} &\Leftrightarrow |1+L| - |Lw_2| - |w_1| > 0, \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow |w_1S| + |w_2T| < 1, \quad \forall \omega \end{aligned}$$

što je identično uvjetu dobivenom za RP.



Veze između NP, RS i RP

- Promatrajmo SISO sistem sa multiplikativnom neizvjesnošću i pretpostavimo da je zatvoreni sistem nominalno stabilan (NS).
- Uvjeti za NP, RS i RP:

$$\text{NP} \Leftrightarrow |w_P S| < 1, \forall \omega$$

$$\text{RS} \Leftrightarrow |w_I T| < 1, \forall \omega$$

$$\text{RP} \Leftrightarrow |w_P S| + |w_I T| < 1, \forall \omega$$

- Preduvjet za RP jest da su zadovoljene NP i RS. Ovo vrijedi kako za SISO, tako i za MIMO sisteme.
- Za SISO sisteme, ako su zadovoljene RS i NP, tada za svaku frekvenciju vrijedi:

$$|w_P S| + |w_I T| \leq 2 \max\{|w_P S|, |w_I T|\} < 2$$



Veze između NP, RS i RP

- Kod MIMO sistema to nije isto, što će se analizirati u sljedećem predavanju.
- Da bi se zadovoljila RS općenito treba mali T , dok se za zadovoljenje NP traži manji S . Ovo istovremeno ne može biti zadovoljeno zbog uvjeta $S + T = 1$.
- Ovo ima implikacije na RP, budući da je:

$$|w_P||S| + |w_I||T| \geq \min\{|w_P|, |w_I|\}(|S| + |T|)$$

$$|S| + |T| \geq |S + T| = 1$$

- Tada za svaku frekvenciju vrijedi:

$$|w_P S| + |w_I T| \geq \min\{|w_P|, |w_I|\}$$